Об обучении школьников поиску решения математических задач*

А.А. Аксенов

Проблема обучения школьников поиску решения математических задач является одной из наиболее трудных в теории и методике обучения математике. Проявляется она прежде всего в том, что математически способные учащиеся не могут найти способ решения, зная весь необходимый для этого теоретический материал. В обучении учащихся начальных и 5–6-х классов эта проблема имеет свою специфику. Во-первых, на этом этапе школьного обучения не может быть организовано какое-либо профильное или специализированное обучение. Во-вторых, математика в курсе начальных классов представляет собой, преимущественно, систему элементарных сведений, которые нужно знать каждому человеку. Самостоятельных теорий, таких как, например, «Векторы на плоскости», этот курс математики еще не содержит.

Исследуя проблему обучения школьников поиску решения математических задач, автор статьи пришел к выводу о том, что для полноценного формирования у учащихся этого умения необходимо, чтобы в процессе обучения были задействованы следующие факторы [1].

1. Нужно предлагать учащимся для решения задачи всех трех степеней проблемности (алгоритмические, полуэвристические, эвристические).

2. Школьники должны освоить прием расчленения сложной задачи на ряд более простых подзадач.

3. В обучении следует использовать задачи, которые: а) сформулированы средствами только одной темы и решены ее же средствами; б) сформулированы средствами одной темы, но решены с помощью аппарата нескольких тем; в) сформулированы средствами нескольких тем и решены только их средствами; г) сформулированы средствами нескольких тем, но к их решению привлекается арсенал других тем.

4. В обучении математике целесообразно использовать задачи на вычисление, доказательство, построение, исследование; задачи, решаемые приведением конкретного примера; конструктивные задачи (в них нужно составить условие, удовлетворяющее изначально данным требованиям и промежуточным результатам решения). Перечисленные выше факторы могут быть основой реализации деятельностного подхода к обучению школьников поиску решения математических задач.

В традиционном школьном обучении указанные факторы практически не используются, поэтому в распоряжении учителя математики оказывается довольно скромный арсенал средств обучения школьников поиску решения математических задач. Бесспорно, в полной мере применить каждый из четырех перечисленных факторов в обучении младшеклассников невозможно, но на пропедевтическом уровне практически все указанные выше средства могут быть задействованы. Далее мы обоснуем этот факт.

Прежде всего заметим, все эти средства и должны быть использованы лишь на пропедевтическом уровне, поскольку психологами установлено, что способность к абстрактно-логическому мышлению формируется у подростков лишь к 13–14 годам [2].

Среди сюжетных задач, решаемых младшеклассниками, большинство являются алгоритмическими, поскольку

* Тема диссертационного исследования «Общая теория обучения поиску решения школьных математических задач». Исследование выполнено без научного консультанта.

в них неизвестно только искомое, но известен способ решения. Однако учащимся можно предлагать и эвристические, и полуэвристические сюжетные задачи.

Под **эвристическими** будем понимать такие задачи, теоретическая основа решения которых школьникам неизвестна.

Использование сюжетных задач, решаемых арифметически, дает учителю возможность организовать продуктивную деятельность учащихся, в ходе которой под руководством учителя и будет «открыт» один из способов решения таких задач, например «на встречное движение». Разумеется, каждый способ так изучать невозможно, поскольку некоторые виды задач могут быть слишком трудны для школьников.

Под **полуэвристическими** будем понимать задачи, в которых неизвестен способ решения и искомое. Рекомендуем, например, такое задание: соотнести каждую из задач предложенного массива с известными способами их решения. В ходе выполнения этой работы учащиеся анализируют взаимосвязь компонентов задачи и сопоставляют полученный результат с основными характеристиками известных им способов решения.

Расчленение сложной задачи на ряд более простых учащиеся начинают осваивать уже в 1-м классе, но речь идет лишь о том, что задача расчленяется на подзадачи непосредственно, т.е. можно сформулировать все ее подзадачи, не зная результата решения каждой их них. Однако часть математических задач может быть расчленена на подзадачи только последовательно, так как некоторые подзадачи могут быть сформулированы лишь после того, как будет известен результат решения предыдущей подзадачи, т.е. имеет место логическая зависимость процесса поиска решения последующей подзадачи от результата решения предыдущей. Таковой является, например, задача «Найдите натуральные числа a и b, такие, чтобы число, обратное их разности, было в три раза больше числа, обратного их же произведению». Составив пропорцию $1/(a - b) = 3/ab$, нужно преобразовать ее к виду $3a - 3b = ab$. Лишь переписав это равенство в виде $3a - ab = 3b$, а затем выполнив вынесение общего множителя за скобки и получив выражение вида $a\ (3 - b) = 3b$, можно сделать вывод, что b может быть равно 1 или 2, так как левая часть равенства должна быть положительной, поскольку его правая часть положительна всегда. Далее легко найти, что только числа 6 и 2 удовлетворяют условию задачи. Заметим, что такие задачи достаточно трудны даже для способных учащихся, поэтому их следует предлагать на завершающем этапе обучения в младших классах.

Большинство задач в курсе математики младших классов решается средствами той же темы, в пределах которой они сформулированы. Задачи, сформулированные средствами одной темы и решаемые с применением арсенала других тем, также вполне могут иметь место в указанном курсе. Это, например, задачи на вычисление, которые решаются в процессе изучения пропедевтического курса геометрии. Основная тема здесь – какой-либо геометрический материал, но для решения задач используются все те знания, которые необходимы для выполнения вычислений, что, конечно же, относится к другой теме. К этому же типу относятся и сюжетные задачи, решаемые с помощью уравнений. В теме «Координатная плоскость» есть несколько задач, сформулированных средствами этой темы с использованием некоторых геометрических фигур (таких, как прямая, ломаная и т.д.). Если задачу «Окружность радиуса 3 см имеет центр в точке A (4; 5). Пересекает ли данная окружность прямую, проходящую через точки B (−2; −3) и C (8; 6)?» наполнить сюжетным содержанием, например, связав центр окружности с местонахождением антенны, радиус окружности –

с радиусом ее действия, а прямую – с близлежащим шоссе, то можно составить задачу о сотовой связи, но правдоподобнее взять другой масштаб, что объединит уже три темы в одной задаче. Причем если о масштабе ничего не говорится в формулировке задачи, а предполагается, что школьники сами (возможно, с помощью учителя) предложат использовать масштаб для построения ее графической интерпретации, то получится, что они решают задачу, сформулированную средствами нескольких тем, привлекая к решению еще одну тему.

В младших классах успешно используются задачи на вычисление.

Задачи на доказательство также могут быть представлены, но в основном на пропедевтическом уровне. Например: «Два прямых угла имеют общую вершину и расположены так, что одна из сторон каждого из этих углов лежит между сторонами другого угла. Найдите четыре пары равных углов».

Примером конструктивной задачи является составление задачи, решаемой в три действия, ответом к которой будет число 43, а в ее формулировке нужно будет использовать словосочетания «столько же» и «меньше на 28».

Задача «Имеются рычажные весы и восемь монет, одинаковых по внешнему виду, семь из которых одинаковой массы, а одна из них легче остальных. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти легкую монету?» является задачей на исследование.

Задача «Может ли сумма двух однозначных чисел быть двузначным числом?» решается приведением конкретного примера.

Наконец, задачи на построение в курсе математики младших классов – это пропедевтические задания на построение геометрических фигур с помощью линейки со шкалой, транспортира и циркуля.

Четыре названных выше фактора успешно применяются в обучении на основе психолого-педагогической концепции Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова, что подтверждает многолетний эксперимент, проводимый в муниципальной гимназии г. Мценска. Эвристические сюжетные задачи учителя предлагают для решения не только в младших, но и в начальных классах. Помимо этого учащиеся, решая сюжетные задачи, в обязательном порядке находят несколько способов их решения. Если такие задачи решаются с помощью уравнений, то, выполняя построение математической модели одного и того же сюжета, школьники зачастую составляют более десяти уравнений.

Уже в начальной школе гимназисты решают конструктивные задачи, а также задачи, для решения которых достаточно привести конкретный пример. Однако к моменту окончания обучения в младших классах ребятам под силу решение задач с доказательством противоположного утверждения. Это связано с тем, что младшим школьникам регулярно предлагаются задачи на доказательство и исследование. Не вдаваясь в дальнейшие подробности хода эксперимента, засвидетельствуем, что изложенные нами идеи, реализуемые в рамках развивающего обучения, могут быть адаптированы к практике массового обучения в современной средней школе.

Литература

1. *Аксенов А.А.* Теория обучения поиску решения школьных математических задач: Монография. – Орел: ОГУ, 2007.

2. *Блонский П.П.* Память и мышление. – СПб.: Питер, 2001.

Андрей Александрович Аксенов *– доцент кафедры математики и информатики Орловского государственного университета.*