

## «Путешествие по Флатландии»: начало формирования многомерного мышления

*С.М. Марчукова*

Статья посвящена изложению основ содержания и структуры учебного пособия для 4-го класса «Путешествие по Флатландии», цель которого – знакомство учащихся с началами и особенностями геометрического мышления. Актуальность изучения такого курса обусловлена тем, что представление о свойствах пространства входит в круг системообразующего знания, определяющего картину мира.

*Ключевые слова:* свойства пространства, геометрическое мышление, Флатландия, двумерный и трёхмерный мир.

В педагогических исследованиях отмечается, что изучение математики и особенно геометрии, кроме того, что имеет научные и прикладные цели, призвано развивать пространственное воображение и образное мышление. Поскольку геометрическое мышление в своей основе является правополушарным, изучение геометрии чрезвычайно важно для комплексного функционального развития головного мозга. Оно способствует формированию не только логического, но и вербально-логического, образного мышления. Для современной системы математического образования характерна недооценка этих аспектов и целей преподавания геометрии, тогда как на них неоднократно указывал в своих работах ещё А. Дистервег [1, с. 70–72]. Значение геометрии для формирования основ математического мышления постоянно подчёркивает Ш. Амонашвили, разрабатывая свои «уроки математического воображения». М.П. Эрдниев пишет: «...алгебра вытесняет геометрию. Математические знания у многих ассоциируются с... алгебраическими формулами – буквами, за которыми часто теряется смысл. Современные люди очень ущемлены в пространственном мышлении – у них знания плоские, двумерные, поскольку

ку до 8-го класса они изучают только планиметрические теоремы. И это очень отражается на развитии психики, ведь мир трёхмерен, человек – существо трёхмерное, и каждая молекула в нашем организме тоже трёхмерная» (цит. по [1, с. 72]).

Действительно, до 7–8-го класса школьники, как правило, изучают только планиметрические теоремы. Пространственное мышление не получает развития на уроках математики в начальной школе, между тем как уроки информатики в это время формируют компьютерную грамотность, достижение которой приобретает другое качество при наличии первых представлений о многомерности. Математическое знание чаще всего ассоциируется с формулами, которые можно найти в справочнике. Особенную актуальность восполнение этого пробела приобретает в наше время, когда многомерная геометрия находит всё более широкое применение в физике и химии, биологии и кристаллографии, экологии и компьютерном моделировании, социологии и дизайне, узнаётся в современном искусстве, в разнообразных литературных жанрах.

Преодолеть это противоречие призвано учебное пособие для 4-го класса «Путешествие по Флатландии», цель которого – знакомство учащихся с **основами и особенностями геометрического мышления, с начальными представлениями о многомерности пространства** [2]. Актуальность курса обусловлена тем, что представления о свойствах пространства входят в круг системообразующего знания, определяющего картину мира. Предполагаемая самостоятельная творческая деятельность учащихся способствует развитию самообразовательных умений, восприятию математики как языка науки и искусства, возникновению интереса к дальнейшему изучению математики.

Как рассказать ученикам в увлекательной и доступной форме об удивительных свойствах пространства, о его особенностях и парадоксах, об искривлённом и расширяющемся пространстве, о роли симметрии в пространственных структурах, о единстве пространства и времени? Как подойти к началам теории относитель-

ности, к вопросам философии современного естествознания? В этом случае могла бы помочь наглядная модель, способная увлечь детей, дать им возможность «поиграть» с материалом, подойти к нему с разных сторон, сочинить свою увлекательную историю и, таким образом, выявить математическое начало в разных способах постижения мира.

Именно такую модель для изучения пространства представляет собой дидактический материал, основанный на сочинении Э. Эббота (1838–1926) «Флатландия» [3]. Он позволяет опуститься на одну ступеньку (в нашем случае – на одно измерение) и войти в мир Флатландии вместе с персонажами и образами известных гравиур М.К. Эшера (1898–1972). Школьники знакомятся с жизнью флатландцев, так похожей на нашу, в форме традиционной английской сказки, полной забавных и необычных ситуаций и в то же время претендующей на полную правдоподобность.

Флатландия – страна двух измерений, в которой живут геометрические фигуры – треугольники, квадраты, многоугольники – со светящимися краями. Моделью такого двумерного мира может служить страница книги. Его обитатели свободно перемещаются во всех направлениях вдоль поверхности, обладают длиной и шириной, но не имеют толщины и лишены возможности даже мысленно представить себе, что такое «верх» и «низ», т.е. направления, перпендикулярные плоскости страницы. Социальный статус флатландца определяется количеством углов: люди низкого сословия – треугольники, джентльмены – квадраты и так далее до Верховной Окружности. Когда количество сторон многоугольника становится так велико, что по внешнему виду он приближается к окружности, его включают в Круговой орден и причисляют к жрецам.

Однако, если друг для друга флатландцы – лишь отрезки прямой, какой же смысл в том, что их сословные различия определяются количеством углов? Откуда во Флатландии вообще знают об углах? «Мы не способны увидеть углы, – говорит джентльмен Квадрат, флатландский математик,

от имени которого ведётся повествование, – но мы можем сделать о них умозаключение, и с большой точностью». «Узнавать» друг друга флатландцев учат в школе. Кроме обычной, «вульгарной» формы представления при знакомстве «Позвольте мне просить Вас ощупать моего друга мистера ... и быть ощупанным им», есть ещё и узнавание по внешнему виду, когда флатландцы ориентируются на разный характер свечения фигуры. Так, например, у Треугольника (купец) светящиеся углы дают одну картину, а у Девятиугольника (судья) – совсем другую, близкую к светящейся линии. Здесь геометрические представления как бы переходят в область чувств. Это признак изысканного воспитания.

Попробуем перенестись во Флатландию. Пейзажи её могут быть необычайно разнообразными, но увидеть это разнообразие «изнутри», из двумерного мира флатландцу невозможно. Куда бы ни посмотрел флатландец, он увидит прямую линию. Только из третьего измерения становится ясно видимой истинная картина мира Флатландии. Флатландцы наделены сознанием и интеллектом, которые позволяют им исследовать свой мир в такой же степени, в какой человек исследует Вселенную. Во Флатландии живёт наш герой – Квадрат, образованный флатландец, учёный. Однажды с ним произошёл странный случай. Вечером, сидя в гостиной, он увидел перед собой непонятное существо: отрезок прямой, который на его глазах становился то больше, то меньше.

Сфера (так существо представилось Квадрату) могла становиться невидимой в то время, как Квадрат слышал её голос; могла дотронуться до внутренностей Квадрата. И, наконец, она представилась не Окружностью (а разве не в этом с достоверностью убедился Квадрат после ощупывания?), а бесчисленным множеством Окружностей разных размеров, как бы сложенных вместе. Такое тело в Трёхмерии называется Сферой, но, посещая Флатландию, оно вынужденно предстаёт перед её обитателями в форме Окружности. Мог ли понять это бедный Квадрат! Его охватил

ужас, когда Сфера вынула счёт из закрытого ящика шкафа, извлекла желток из яйца, не разбивая скорлупы, слегка дотронулась до его желудка. Квадрат был известным флатландским математиком, его оскорбляло высокомерное издевательство непонятного существа, которое показывало фокусы вместо того, чтобы доходчиво рассказать об устройстве своего мира. Поэтому наш герой провозгласил, набравшись смелости: «Не поверю, пока не увижу сам!» Он вцепился в бок Сферы и не отпускал её до тех пор, пока она не перенесла его в свой трёхмерный мир. Квадрат увидел странную картину: собственный дом из третьего измерения, флатландцев в виде геометрических фигур, а не прямой линии. Посмотрев вокруг, он увидел весь трёхмерный мир и постепенно, с помощью Сферы, смог воспринимать его.

Сфера продемонстрировала Квадрату пространственный вариант его фигуры – куб, который сначала казался ему неправильной плоской фигурой. Постепенно Квадрат научился отличать плоские фигуры от пространственных тел. Он ведь был математиком и смог понять удивительную красоту и гармонию трёхмерного мира, особенно пространственных геометрических тел, о которых ранее мог делать лишь умозаключения, основанные на изучении математических формул. Легко представить себе страх и растерянность Квадрата: его привычное пространство как бы «развернулось» подобно тому, как на графиках М.К. Эшера двумерный мир «разворачивается» в трёхмерный.

Школьники не только изучают, но и эмоционально переживают те истории и ситуации, которые происходят с обитателями Флатландии: то Сфера чудесным образом «переворачивает» флатландских собак, то геометр – доктор Пункто обнаруживает поразительные свойства поверхности Флатландии. Вызывает удивление и странный мостик между двумерным и трёхмерным миром – «лента Мёбиуса», которую так просто склеить и воочию обнаружить её свойства. Многие явления двумерного мира непонятны нам, но это естественно: речь идёт действительно о другом мире.

Находя ответы на внешне простые, «наивные» вопросы, ученики совершают удивительные открытия, наглядно представляя себе те трудности, с которыми сталкивается двумерное существо при попытке вообразить привычное для нас третье измерение. Впрочем, иногда эти ответы найти невозможно. Сколько ни пыталась Сфера объяснить Квадрату, что видимые круги разного диаметра – это всё она одна, когда проходит сквозь Флатландию вверх и вниз, он так и не смог вообразить себе трёхмерную сферу, принизывающую его двумерный мир. Когда ученикам предлагается вопрос «Как бы вы на месте Сферы стали рассказывать Квадрату о трёхмерном мире?», в классе часто разворачивается бурная дискуссия, в ходе которой выдвигаются различные предложения.

Чаще всего ребята предлагают нарисовать систему координат трёхмерного мира, ведь её чертят на плоскости. Однако для нас такой чертёж – лишь условное изображение объёмного предмета. Эта условность недоступна воображению Квадрата. Третья ось в системе координат трёхмерного мира, с нашей точки зрения, – проекция объёмного изображения на плоскость, но для него лишь ещё одна линия на плоскости. Самый убедительный аргумент Сферы звучал так: Квадрат смог бы понять, что такое третье измерение, если бы имел ещё один глаз (второй) в собственной внутренности. Разумеется, такое объяснение не могло удовлетворить Квадрат.

Наше чувство превосходства постепенно сменяется мыслью о том, что мы сами, пытаясь представить себе искривлённое и расширяющееся трёхмерное пространство, мало чем отличаемся от обитателей Флатландии. Как они, мы находимся «внутри» своего пространства и не можем вообразить Вселенную в виде наглядной модели просто потому, что лишены возможности увидеть наш мир «снаружи» подобно тому, как мы различаем разнообразие пейзажей Флатландии, в то время как сами флатландцы видят вокруг лишь прямые линии. Дело здесь совсем не в совершенстве приборов, методах

измерения и уровне погрешности. Свойства самого пространства таковы, что «развернуть» его, увидеть действительную картину можно только из  $(n + 1)$ -го измерения. Так, наглядно и с полной очевидностью можно понять математическое утверждение: живя в  $n$ -мерном пространстве, мы способны чувствовать  $(n - 1)$ -е измерение.

На обобщающем итоговом уроке ученики читают «флатландские сказки» собственного сочинения. Вот два примера таких сказок:

### Флатландия

В трёхмерном пространстве жили два друга – конуса. Они услышали о существовании двумерного мира – Флатландии и решили посетить её. Друзья знали, где находится загадочная дверь, которая ведёт туда.

Когда первый конус открыл дверь, он споткнулся о порог, потерял равновесие и упал на поверхность, гладкую как зеркало. Его приятель осторожно переступил через порог и тоже оказался во Флатландии, но, увы, они не узнали друг друга. Один конус превратился в окружность, другой – в равнобедренный треугольник.

В чужой стране было неуютно, и вскоре приятели захотели вернуться назад. Но кто мог подумать, что безобидное любопытство двух одинаковых конусов приведёт к таким непоправимым последствиям! Когда они вернулись домой, в трёхмерное пространство, один из них оказался прекрасной сияющей сферой, а другой – строгой и стройной пирамидой.

*Дима В.*

### Происшествие с королевой

В одном флатландском королевстве жила добрая королева. Она помогала людям, и все любили её. Но однажды злая колдунья превратила сердце королевы в кусок льда. Жизнь в королевстве сразу изменилась: трудно было поверить в то, что добрая правительница стала такой злой и бессердечной. Особенно страдала принцесса. Она очень любила свою мать и не знала, как помочь ей. Она решила посоветоваться со старым звездочётом. Он знал секреты магии и был добрым волшебником. Звездочёт ответил принцессе: «Я помогу тебе. Для это-

го просто надо выйти в трёхмерный мир. Оттуда видно всё, что находится внутри, и сердце тоже. Часто колдовством называют то, что делают в трёхмерном мире». Ночью, когда королева спала, он вышел в трёхмерный мир и вылил из кувшина тёплую воду на сердце королевы. Оно оттаяло, и королева вновь стала доброй.

*Маша М.*

Иногда «флатландские сюжеты» разыгрываются в школьных спектаклях. Ученики с удовольствием чертят и рисуют, воспроизводят гравюры М.К. Эшера и иллюстрации из «Флатландии» Э. Эббота, вырезают и клеят ленту Мёбиуса, а также придумывают истории из жизни фигур на плоскости, сочиняют рассказы, сказки, пишут эссе и стихи.

«Путешествие по Флатландии» нередко изучается параллельно с «Наглядной геометрией» Ф. Шарыгина, и это становится пропедевтикой систематического изучения курса геометрии. К представлению о Флатландии как модели двумерного мира необходимо будет вернуться при обсуждении таких вопросов физики и математики, как симметрия, бесконечность в современных космологических моделях, теория относительности. Дидактическими достоинствами учебной модели в данном случае являются её наглядность, конкретность, а также возможность выразить неизвестное на известном ученику языке с помощью таких средств описания, которыми он владеет.

### Литература

1. *Марчукова, С.М.* Размышления методиста : науч.-метод. изд. / С.М. Марчукова. – СПб., 2002.
2. *Марчукова, С.М.* Путешествие по Флатландии / С.М. Марчукова. – СПб., 1996.
3. *Эббот, Э.* Флатландия / Э. Эббот. – СПб., 2001.
4. *Escher, M.K.* Grafiek en Tekeningen / M.K. Escher. – Zwolle, 1959.

*Светлана Марковна Марчукова – канд. пед. наук, зав. кафедрой национального образования Национального гуманитарного университета России, г. Санкт-Петербург.*